בס"ד

Mathematics

מבינים מתמטיקה

חוברת סיכום קורס

הסתברות

תוכן עניינים

הקדמה

שלום,

לפניכם חוברת הניתנת לכל מי שצופה בקורס עם חן הררי באתר סטאדיס www.Studies.co.il.
נא קראו בעיון את הדברים הבאים לפני שאתם מתחילים לעבוד עם החוברת.

איך לעבוד נכון עם חוברת סיכום קורס?

1) יש הבדל מהותי בין סיכום **שלכם** לבין סיכום של **מישהו אחר** – סיכום שלנו תמיד נקלט הרבה יותר טוב בראש שלנו מאשר סיכום של מישהו אחר, ולכן כדי שהסיכום הזה יקלט טוב, אני מציע לכם בחום לעבוד לפי עקרון מוביל אחד וחשוב: **להפוך את הסיכום הזה – לשלכם.**

אז איך עושים את זה? באופן הבא:

מדגישים, מקיפים, ממרקרים, $\boxed{\text{ממלבנים}}$, כותבים הערות קטנות בצד וכד'.

וגם כותבים ממש על גבי הנוסחאות עצמן כמו למשל כך:
$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$$
זה נכון רק כאשר מרחב המדגם הוא סימטרי!

ובקיצור עושים כל מה שצריך כדי להפוך את הסיכום הזה לשלכם.

2) אחד המפתחות להצלחה בקורס הזה הוא: **לשנן, לשנן ואז עוד קצת לשנן.** לפעמים שואלים אותי – חן, מה אנחנו בשיעור היסטוריה? מה לשנן, זו מתמטיקה! אז אני תמיד עונה: "המתמטיקה בנויה על שלוש רגליים – **הבנה, תרגול ושינון"** (ולא ניתן להתחמק מהרגל השלישית!).

בקורס אנחנו עובדים על שני החלקים הראשונים: הבנה ותרגול.

שינון – זה עליכם. והחוברת הזאת נועדה בדיוק בשביל זה. השינון נועד לתת לכם רצף מחשבתי כדי שתוכלו לנסח דרך פתרון קוהרנטית טבעית ורציפה ללא צורך לעבור דרך חיפוש נוסחה כזאת או אחרת בדף הנוסחאות. משננים ואז הכל נמצא בראש שלנו ויכול להישלף מהזיכרון בקלות בשעת מבחן.

בהצלחה!

מושגי בסיס

קומבינטוריקה

תמורות

מספר האפשרויות לסדר n עצמים שונים בשורה הוא $n!$

דוגמא: כמה אפשרויות ישנן להושיב 6 ילדים בשורה?

תשובה: $6!=720$

מספר האפשרויות לסידור n עצמים שונים במעגל הוא $(n-1)!$

דוגמא: בכמה אופנים ניתן להושיב 6 אורחים סביב שולחן עגול?

תשובה: נושיב את אחד האורחים, אין חשיבות לאיפה הוא יושב כי השולחן עגול. כעת נותר לסדר 5 אורחים ביחס אליו (יצרנו "עוגן" לבעיה), במילים אחרות שאר חמשת האורחים מתיישבים למעשה על "ספסל" (אומנם מעוגל) בן 5 מקומות, לכן מספר האפשרויות להושיב אותם הוא $5!=120$

תמורות עם חזרות

מספר האפשרויות לסידור n עצמים מ- m סוגים שונים בשורה: k_1 עצמים מסוג 1, k_2 עצמים מסוג 2, ... , k_m עצמים מסוג m, כך ש- $k_1+k_2+...+k_m=n$ הוא $\frac{n!}{k_1!k_2!...k_m!}$.

דוגמא: ישנם 9 כדורים בשק. 4 אדומים, 3 כחולים ו- 2 ירוקים. כמה אפשרויות ישנן לסדר אותם בתשעה תאים (כאשר כל תא יכול להכיל עד כדור אחד בלבד)?

תשובה: $\frac{9!}{4!3!2!}=1260$

<u>חליפות</u>

מספר האפשרויות לבחור k עצמים מתוך n עצמים, <u>עם</u> חשיבות לסדר <u>וללא</u> חזרות, מסומן ע"י $^{n}P_{k}$,

כאשר:

$$^{n}P_{k}=\frac{n!}{(n-k)!}$$

<u>דוגמא</u>: כמה אפשרויות ישנן לסדר 3 כדורים <u>שונים</u> זה מזה בחמישה תאים (כאשר בכל תא יכול להיכנס עד כדור אחד בלבד)?

<u>תשובה</u>: בבעיה זו הסדר משנה (כי צבעי הכדורים שונים זה מזה) ואין חזרות (כי לא ניתן לחזור על בחירה של תא מסוים ולהכניס לשם יותר מכדור אחד), לכן זו בעיית חליפות והתשובה היא:

$$^{5}P_{3}=\frac{5!}{(5-3)!}=\frac{5!}{2!}=5\cdot4\cdot3=60$$

<u>צירופים</u>

מספר האפשרויות לבחור k עצמים מתוך n עצמים, <u>ללא</u> חשיבות לסדר <u>וללא</u> חזרות, מסומן ע"י $^{n}C_{k}$**, כאשר:**

$$^{n}C_{k}=\frac{n!}{(n-k)!k!}$$

<u>דוגמא</u>: כמה אפשרויות ישנן לסדר 3 כדורים <u>זהים</u> זה לזה בחמישה תאים (כאשר בכל תא יכול להיכנס עד כדור אחד בלבד)?

<u>תשובה</u>: בבעיה זו הסדר לא משנה (כי צבעי הכדורים זהים זה לזה) ואין חזרות (כי לא ניתן לחזור על בחירה של תא מסוים ולהכניס לשם יותר מכדור אחד), לכן זו בעיית צירופים והתשובה היא:

$$^{5}C_{3}=\frac{5!}{(5-3)!3!}=\frac{5!}{2!3!}=10$$

<u>חליפות עם חזרות</u>

מספר האפשרויות לבחור k עצמים מתוך n עצמים, <u>עם</u> חשיבות לסדר <u>ועם</u> חזרות הוא n^{k}.

<u>דוגמא</u>: כמה אפשרויות ישנן לפיצוח קוד נעילה בן 4 ספרות לנייד?

<u>תשובה</u>: בבעיה זו ישנן 10 אפשרויות לבחירת כל ספרה (0,1,...,9) מתוך ארבעת הספרות של הקוד. כמו-כן זו בעיה עם חשיבות לסדר הספרות (הקוד 1234 הוא קוד שונה מאשר 4321 למשל) ועם חזרות (הקוד 1111 למשל הוא לגיטימי) ולכן זו בעיית חליפות עם חזרות והתשובה היא: $10^{4}=10,000$.

<u>דוגמא נוספת</u>: סדרה בינארית היא סדרה שמכילה רק אפסים ואחדים. כמה אפשרויות ישנן ליצור סדרה בינארית באורך n? <u>תשובה</u>: 2^{n}

<u>צירופים עם חזרות</u>

מספר האפשרויות לבחור k עצמים מתוך n עצמים, <u>ללא</u> חשיבות לסדר <u>ועם</u> חזרות, הוא:

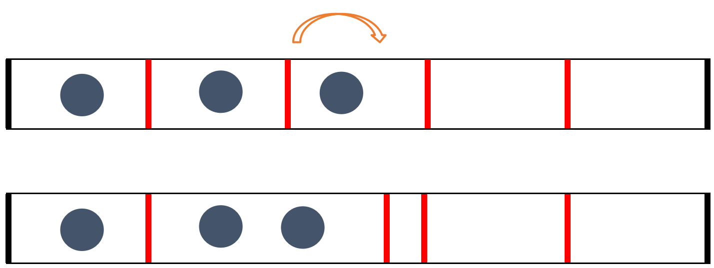
$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

<u>דוגמא</u>

כמה אפשרויות ישנן לסדר 3 כדורים <u>זהים</u> זה לזה ב- 5 תאים, כך שקיבולת כל תא <u>אינה מוגבלת</u>?

<u>תשובה</u>: **<u>שיטת המחיצות הנעות</u> (Stars and bars)**

במקום לחשוב על מבנה של תאים קשיחים, נחשוב על תא אחד ארוך עם מחיצות פנימיות שיכולות לנוע ולשנות מיקום. למשל, בדוגמא שלנו ישנן חמישה תאים, כלומר ישנן 4 מחיצות שמפרידות בין תא לתא (באדום בשרטוט) ובנוסף לשתי מחיצות בקצוות (בשחור). המחיצות בקצוות לא מעניינות אותנו מכיוון שאותם אנחנו נועלים ולא מזיזים. לעומתן המחיצות הפנימיות ניתנות להזזה.



נערוך ספירת מלאי:

לחמישה תאים ישנן **4** מחיצות נעות זהות.

בנוסף יש לנו בדוגמא **3** כדורים זהים.

לכן בסך הכל יש לנו כאן **7** עצמים שיכולים לנוע ולהתערבב: **4** מחיצות זהות ו- **3** כדורים זהים.

בצורה זו חזרנו לבעיית צירופים קלאסית וכעת ניתן לשאול את השאלה השקולה הבאה:

כמה אפשרויות ישנן לסדר 3 עצמים זהים מסוג אחד ו- 4 עצמים זהים מסוג שני בשורה?

והתשובה תהיה: $\frac{7!}{3!4!} = 35$. אם לחלופין נרצה לעבוד לפי הנוסחה אזי נאמר כי בבעיה זו הסדר לא משנה (כי צבעי הכדורים זהים זה לזה) ויש חזרות (כי ניתן לחזור על בחירה של תא מסוים ולהכניס לשם יותר מכדור אחד) ולכן זו בעיית צירופים עם חזרות והתשובה היא כאמור:

$$\binom{5+3-1}{3} = \frac{(5+3-1)!}{3!(5-1)!} = \frac{7!}{3!4!} = 35$$

<u>דוגמא כללית להבנת הנוסחה</u>

כמה אפשרויות ישנן לסדר k כדורים **זהים זה לזה** ב- n תאים, כך שקיבולת כל תא אינה מוגבלת?

<u>תשובה</u>

נערוך ספירת מלאי בשיטת המחיצות הנעות:

ל- n התאים ישנן **n-1** מחיצות נעות זהות.

בנוסף ישנם **k** כדורים זהים.

בסך הכל ישנם **n-1+k** עצמים משני סוגים: **k** כדורים ו- **n-1** מחיצות. מספר האפשרויות לסידורם בשורה הוא:

$$\binom{n+k-1}{k}=\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

טבלת סיכום

טבלת הבחירה – מספר האפשרויות לבחירת k עצמים מתוך n עצמים:

	ללא חזרות	עם חזרות
עם חשיבות לסדר	**חליפות** $^{n}P_{k}=\frac{n!}{(n-k)!}$	**חליפות עם חזרות** n^{k}
ללא חשיבות לסדר	**צירופים** $^{n}C_{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$	**צירופים עם חזרות** $\binom{n+k-1}{k}=\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$

טבלת התמורות – מספר האפשרויות לסידור n עצמים:

	ללא חזרות	עם חזרות
תמורות	סידור n עצמים בשורה: $n!$ סידור n עצמים במעגל: $(n-1)!$	**סידור n עצמים מ- m סוגים שונים בשורה:** $\frac{n!}{k_1!k_2!...k_m!}$ $k_1+k_2+...+k_m=n$,

מושגי בסיס בהסתברות

Ω = מרחב המדגם, היא קבוצת כל התוצאות האפשריות.

$|\Omega|$ = גודל מרחב המדגם, שווה למספר האיברים שבה.

מרחב מדגם סימטרי – לכל תוצאה במרחב יש הסתברות שווה (מילה המרמזת על כך – "באקראי").

$A\subseteq\Omega$ - תת-קבוצה של מרחב המדגם, היא קבוצת התוצאות הרצויות.

<u>**מסקנה:**</u> במרחב מדגם סימטרי מתקיים: $\boxed{P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}}$ ("רצוי" חלקי "מצוי").

אקסיומות פונקציית ההסתברות

פונקציה $P(x)$ נקראת פונקציית הסתברות אם היא מקיימת את שלושת האקסיומות הבאות:

1) $P(\phi)=0$

2) $P(\Omega)=1$

3) אם $\{A_i\cap A_j=\phi \quad , \quad \forall i\neq j\}$ (כלומר אם $A_1,A_2,\ldots$ <u>מאורעות זרים</u>) אזי:

$$P\left(\bigcup_i A_i\right)=\sum_i P(A_i)$$

כאשר $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ קבוצה בת מנייה.

תכונות הנובעות מאקסיומת ההסתברות

א) אם $A\subseteq B$ אזי $P(A)\leq P(B)$.

ב) $P(A^C)=1-P(A)$

ג) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

ד) $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-[P(A\cap B)+P(A\cap C)+P(B\cap C)]+P(A\cap B\cap C)$

ד') הכללה:

$$P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)-[P(A_1\cap A_2)+\ldots+P(A_{n-1}\cap A_n)]+$$
$$+[P(A_1\cap A_2\cap A_3)+\ldots+P(A_{n-2}\cap A_{n-1}\cap A_n)]-\ldots\pm P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)$$

כאשר הסימן במחובר האחרון נקבע ע"פ זוגיות n: אם n א"ז ניקח מינוס (כמו בתכונה **(ב)**), אם n זוגי ניקח פלוס (כמו בתכונה **(ג)**).

חוקי דה-מורגן

$$\left(\bigcup_{i=1}^{N}A_i\right)^C=\bigcap_{i=1}^{N}A_i^C \qquad\qquad \left(\bigcap_{i=1}^{N}A_i\right)^C=\bigcup_{i=1}^{N}A_i^C$$

הסתברויות מותנות

הסתברות מותנית

אם $P(B)>0$ אזי:

$$\boxed{P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}}$$

נוסחת ההסתברות השלמה

אם $\Omega=\bigcup_{k=1}^{N}B_k$ (N סופי או ∞ בר-מנייה), $P(B_k)>0$, $\forall k\neq j$, $B_k\cap B_j=\phi$ אזי:

$$\boxed{P(A)=\sum_{k=1}^{N}P(A|B_k)P(B_k)}$$

נוסחת בייס

אם $P(B)>0$ אזי:

$$\boxed{P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}}$$

או בניסוח שקול:

<u>אם</u>: $\Omega=\bigcup_{i}A_i$ ($\sum_{i}P(A_i)=1 \Leftrightarrow$ כאשר A סופי או בר-מנייה),

$P(A_i\cap A_j)=0$, $\forall i\neq j$ ($\Leftrightarrow A_i\cap A_j=\phi$, $\forall i\neq j$),

$P(A_j)>0$,

<u>אזי</u>:

$$\boxed{P(A_i|B)=\frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j}P(B|A_j)P(A_j)}}$$

כאשר במכנה מופיע $P(B)=\sum_{j}P(B|A_j)P(A_j)$ לפי נוסחת ההסתברות השלמה.

מאורעות בלתי תלויים

<u>הגדרה</u>: A ו- B מאורעות בלתי תלויים זה בזה אם מתקיים:

$$\boxed{P(A\cap B)=P(A)P(B)}$$

<u>הערה</u>: אם בנוסף $P(B)>0$ אזי: $\boxed{P(A|B)=P(A)}$

חוסר תלות בשלשות

A, B ו- C מאורעות ב"ת <u>בשלשות</u> אם: $P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$.

<u>הערה</u>: זה <u>לא</u> אומר שהם גם ב"ת <u>בזוגות</u>!

כלומר כדי להוכיח ש- $\{A,B,C\}$ <u>משפחה</u> של מאורעות ב"ת (גם בזוגות וגם בשלשות), צריך להוכיח

חוסר תלות בין כל הזוגות:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)\ ,\ P(A\cap C)=P(A)P(C)\ ,\ P(B\cap C)=P(B)P(C)$$

וגם חוסר תלות בשלשות: $P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$.

ניתן להכליל תכונה זאת לחוסר תלות בין משפחה של מאורעות $A=(A_1,A_2,...,A_n)$ - כדי להוכיח

ש- A היא משפחה של מאורעות ב"ת זה בזה צריך להוכיח חוסר תלות לכל תת-קבוצה של A (זוגות,

שלשות וכן הלאה).

חוסר תלות המאורעות המשלימים

אם (A,B) ב"ת אזי גם: (A,B^C) , (A^C,B) , (A^C,B^C) מאורעות ב"ת.

חוסר תלות המאורעות המשלימים לשלשה ב"ת

אם $\left(A,B,C\right)$ ב"ת אזי גם:

$$\begin{cases}\left(A^C,B^C,C^C\right)\ , \\ \left(A^C,B^C,C\right)\ ,\ \left(A,B^C,C^C\right)\ ,\ \left(A^C,B,C^C\right) \\ \left(A^C,B,C\right)\ ,\ \left(A,B^C,C\right)\ ,\ \left(A,B,C^C\right)\end{cases}$$ מאורעות ב"ת.

חוסר תלות המאורעות המשלימים ל- n-יה בלתי תלויה

אם $\left(A_1,A_2,...,A_n\right)$ ב"ת אזי גם $\left(B_1,B_2,...,B_n\right)$ ב"ת כאשר $B_i=\left\{A_i\ \ or\ \ A_i^C\right\}$.

בסך הכל ישנן 2^n אפשרויות של n-יות בלתי תלויות.

הסתברות מותנית למאורע משלים

$$P\left(A^C\mid B\right)=1-P\left(A\mid B\right)$$

משתנים מקרים בדידים

הגדרה: X הוא משתנה מקרי (מ"מ) בדיד אם הטווח שלו סופי או ניתן להימנות.

$P_X(k)$ היא פונקציית ההסתברות של X ומתארת את פריסת ההסתברויות של תוצאות X.

תכונות של פונקציית הסתברות של מ"מ בדיד

1) $P_X(k) \geq 0 \quad , \forall k$

2) $\sum_k P_X(k) = 1$

משתנים מקרים רציפים

הגדרה: X הוא משתנה מקרי (מ"מ) רציף בהחלט אם קיימת פונקציה $f_X(x)$ כך ש-

$$P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

כאשר $f_X(x)$ נקראת פונקציית הצפיפות של X.

הערות

1) אם X מ"מ רציף אזי $P(X = a) = 0$.

2) אם X מ"מ בדיד אזי האינטגרל הופך לסכום: $\boxed{P(a \leq X \leq b) = \sum_{a \leq k \leq b} P_X(k) = \sum_{a \leq k \leq b} P(X = k)}$

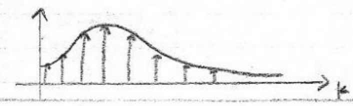
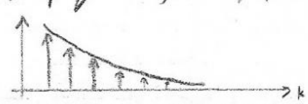
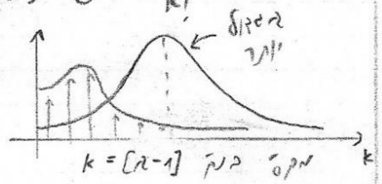
תכונות של פונקציית הסתברות של מ"מ רציף

1) $f_X(x) \geq 0$

2) $P(\overbrace{-\infty < X < \infty}^{\Omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$

3) פונקציית הצפיפות נקבעת היחידות עד כדי מספר סופי או ניתן להימנות של נקודות.

טבלת משתנים מקרים בדידים נפוצים

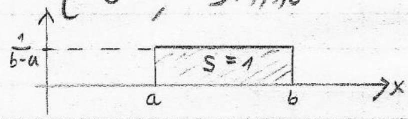
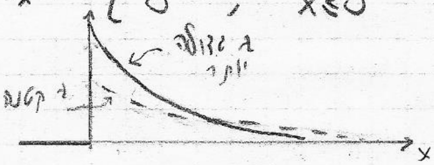
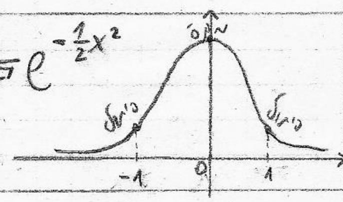
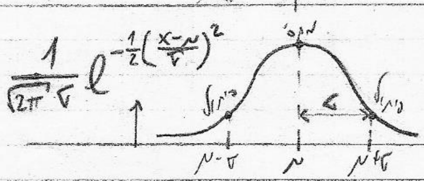
מ"מ X	סימון X~	מטרה	פונקציית ההסתברות	תוחלת $EX=\mu$	שונות $VarX=\sigma_x^2$	הערות
ברנולי	$Bern(p)$	חישוב הצלחה בניסוי ברנולי בודד	$P_x(k)=\begin{cases} p, & k=1 \\ q, & k=0 \end{cases}$	p	pq	$q=1-p$
בינומי	$Bin(n,p)$	ההסתברות ל-k הצלחות מתוך n ניסויים	$P_x(k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$, $k=0,1,\dots,n$ 	np	npq	כש- n גדול ו-p קטן אז: $Bin(n,p)\sim Pois(\overset{\lambda}{np})$ $Bin(n,p)*Bin(m,p)=Bin(n+m,p)$ $Bin(pois(\lambda),p)\sim pois(\lambda p)$: [illegible]
גיאומטרי * ראה מ"מ היפרגאומטרי בסוף הטבלה מס' 7	$Geom(p)$	ההסתברות להצלחה ראשונה לאחר k-1 כשלונות מתוך k ניסויים	$P_x(k)=pq^{k-1}$, $k=1,2,\dots$ 	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	תכונת חוסר הזיכרון: $P(X>n+k \mid X>n)=P(X>k)$
פואסוני	$pois(\lambda)$	X הוא מ"מ בדיד המפולג פואסוני עם פרמטר λ	$P_x(k)=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$ 	λ	λ	$pois(\lambda_1)*pois(\lambda_2)=pois(\lambda_1+\lambda_2)$
מולטינומית	$mult(n,\vec{p})$	$\vec{X}=\{X_1,X_2,\dots,X_k\}$ n=מס' הניסויים k=מס' האפשרויות לתוצאות בכל ניסוי p_i=ההסתברות לקבל תוצאה i	$P_x(X_1=n_1,X_2=n_2,\dots,X_k=n_k)=\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\dots p_k^{n_k}$	$\mu_{x_i}=np_i$		
בינומי שלילי	$NegBin(r,p)$	X = מס' הכשלונות לפני ההצלחה מס' r	$P_x(k)=\binom{k+r-1}{k}p^r q^k=\binom{k+r-1}{r-1}p^r q^k$	$r\cdot\frac{q}{p}$	$r\cdot\frac{q}{p^2}$	$pasc(1,p)=Geom(p)$ $pasc(r,p)*pasc(s,p)=pasc(r+s,p)$
פסקל	$pasc(r,p)$	Y = מס' הניסויים הדרושים עד להצלחה מס' r	$P_y(k)=\binom{k-1}{k-r}p^r q^{k-r}=\binom{k-1}{r-1}p^r q^{k-r}$	$\frac{r}{p}$	$r\cdot\frac{q}{p^2}$	בהצבת $Y=X+r$ כאן k הוא מס' הניסויים $k\to k-r$

מ"מ X	סימון X~	מטרה	פונקציית ההסתברות	תוחלת $EX=\mu$	שונות $Var(X)=\sigma^2$
היפר גיאומטרי	$X\sim HG(N,D,n)$	מספר ההצלחות ב- n הניסויים מתוך N, הראשונים בהינתן D הצלחות בסך הכל מתוך N	$P_X(k)=\frac{\binom{D}{k}\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ $\boxed{k=0,1,2,\dots,n}$	$\frac{nD}{N}$	$n\frac{D}{N}\cdot\frac{N-D}{N}\cdot\frac{N-n}{N-1}$

הערה: טוב לבעיות שבהן "אין החזרה", כמו הוצאת כדורים משק ללא החזרה, כך שההסתברויות "להצלחה" כל הזמן משתנות.
בדרך-כלל היתה החזרה, הבעיה היתה הופכת לבינומית $Bin(n,p)$.
$p=\frac{D}{N}$ קבוע

טבלת משתנים מקרים רציפים נפוצים

משתנים מקריים רציפים מיוחדים:

מ"מ X	סימון X~	פונקציית הצפיפות	תוחלת $EX=\mu$	שונות $varX=\sigma_x^2$	הערות
אחיד	$U[a,b]$	$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$ 	$\frac{b+a}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	אם $X\sim U[a,b]$, תמיד ניתן לרשום: $X=a+(b-a)U[0,1]$ או: $Z=\frac{X-a}{b-a}$, $Z\sim U[0,1]$
מעריכית (אקספוננציאלית)	$Exp(\lambda)$	$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$ 	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	תכונת חוסר הזיכרון! $p(X>t+s\mid X>t)=p(X>s)$ המומנט ה-k: $M_k=\frac{k!}{\lambda^k}$ אם: $X\sim exp(\lambda)$ אז: $Z=\lambda X$ כאשר: $Z\sim exp(1)$
גאוסית תיקנית	$N(0,1)$	$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ 	0	1	$M_{2k}=(2k-1)!!$, $k=1,2,\dots$ $M_{2k-1}=0$
גאוסית כללית	$N(\mu,\sigma^2)$	$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ 	μ	σ^2	אם: $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $Z\sim N(0,1)$ $p(a<X<b)=p\left(\frac{a-\mu}{\sigma}<Z<\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$ $=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$, כאשר: $X=\mu+\sigma Z$
גאמה	$\Gamma(r,\lambda)$	$f_X(x)=\frac{\lambda^r}{(r-1)!}x^{r-1}e^{-\lambda x}$	$\frac{r}{\lambda}$	$\frac{r}{\lambda^2}$	$\Gamma(r,\lambda)+\Gamma(s,\lambda)=\Gamma(r+s,\lambda)$ $\Gamma(1,\lambda)=exp(\lambda)$

המומנט ה- k-י של מ"מ $Gamma(r,\lambda)$: $m_k=\frac{(r+k-1)!}{(r-1)!}\cdot\frac{1}{\lambda^k}$

פונקציית התפלגות

<u>הגדרה:</u> למ"מ X נגדיר פונקציית התפלגות: $F_X\left(x\right)=P\left(X\le x\right)$.

<u>תכונות פונקציית התפלגות</u>

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}F_X\left(x\right)=0$

2) $P\overbrace{\left(-\infty<X<\infty\right)}^{\Omega}=\lim\limits_{x\to\infty}F_X\left(x\right)=1$

3) $F_X\left(x\right)$ פונקציה לא יורדת.

4) $F_X\left(x\right)$ רציפה מימין (ערך הפונקציה הוא תמיד הגבול מימין).

5) אם X מ"מ רציף (בהחלט) אזי $F_X\left(x\right)$ היא פונקציה רציפה.

6) $P\left(X=x\right)=F_X\left(x\right)-\lim\limits_{y\to x^-}F_X\left(y\right)$ = ערך הקפיצה של $F_X\left(x\right)$ בנקודה x (אם X מ"מ בדיד אזי מקבלים את ההסתברות לקבל ערך x, אם X מ"מ רציף אזי מקבלים $P\left(X=x\right)=0$,

לכן $\left(6\right)$ גורר את $\left(5\right)$).

<u>משפט – הקשר בין פונקציית ההתפלגות לפונקציית הצפיפות</u>

אם X מ"מ רציף אזי: $\boxed{F_X'\left(x\right)=f_X\left(x\right)}$ בכל x בו F_X גזירה.

<u>ניסוח שקול:</u>

$$\boxed{F_X\left(x\right)=\int_{-\infty}^{x}f_X\left(u\right)du}$$

<u>משפט – פירוק פונקציית ההתפלגות לבדיד ורציף</u>

יהי X מ"מ ותהי $F_X\left(x\right)$ פונקציית ההתפלגות שלו, אזי קיים קבוע $0\le\alpha\le1$ וקבוע $\beta=1-\alpha$

וקיימת פונקציית התפלגות בדידה $F_X^d\left(x\right)$ וקיימת פונקציית התפלגות רציפה $F_X^c\left(x\right)$ כך ש-

$\boxed{F_X\left(x\right)=\alpha F_X^d\left(x\right)+\beta F_X^c\left(x\right)}$, כאשר α שווה לסכום הקפיצות.

טרנספורמציה של משנה מקרי

משפט הטרנספורמציה

יהי X מ"מ בעל צפיפות $f_X(x)$ ותהי $h(x)$ פונקציה מונוטונית ממש ($\Leftarrow$ חח"ע) וגזירה בתומך של x.

נגדיר $Y=h(x)$ אזי: $\boxed{f_Y(y)=\left|\left[h^{-1}(y)\right]'\right| f_X\left(h^{-1}(y)\right)}$

<u>הערה חשובה</u>: מ"מ שומר על סוגו (אחיד/בינומי/... וכד') תחת טרנספורמציה <u>לינארית</u>.

משפט הטרנספורמציה – הרחבה

יהי X מ"מ בעל צפיפות $f_X(x)$ ותהי $Y=h(x)$ פונקציה גזירה כך שלכל y יש מספר סופי של

מקורות $x_1,x_2,\dots,x_k$ (בתומך של X) בהתאם, אזי לכל y קיימות פונקציות הפוכות:

$$\boxed{f_Y(y)=\sum_{i}^{k}\left|\left[h_i^{-1}(y)\right]'\right| f_X\left(h_i^{-1}(y)\right)}$$

אלגוריתם לתרגילי טרנספורמציה

יהי X מ"מ, ו- $Y=h(X)$ טרנספורמציה שלו. רוצים את פונקציית הצפיפות של Y: $f_Y(y)=?$.

1) שרטוט הטרנספורמציה – נשרטט את פונקציית הטרנספורמציה $Y=h(X)$ (שימו-לב אילו ערכים Y יכול לקבל).

2) חישוב פונקציית ההתפלגות – נרצה לחשב את פונקציית ההתפלגות של Y. לפי ההגדרה מתקיים כי:

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P\left(h(X)\le y\right)$$

שימו-לב, זאת שאלה הסתברותית ששואלת: לאילו ערכים של X, גרף הפונקציה $Y=h(X)$ נמצא

מתחת לגרף הקו האופקי $Y=y$.

3) חלוקה לפי תחומים של y – נפתור את השאלה ההסתברותית לעיל בהתאם לערכים השונים ש- $Y=y$ יכול לקבל. נעזר בגרף הטרנספורמציה ובגרף פונקציית הצפיפות $f_X(x)$.

4) בדיקה – נבדוק כי פונקציית ההתפלגות שקיבלנו תואמת את תכונות פונקציית התפלגות (מונוטונית לא יורדת, $\lim_{x\to\infty} F_Y(y)=1$, $\lim_{x\to-\infty} F_Y(y)=0$, רציפות מימין וכו').

5) גזירה – לקבלת הצפיפות נגזור את ההתפלגות: $f_Y(y)=F_Y'(y)$.

אלגוריתם לתרגילי טרנספורמציה עם שני משתנים

יהי (X,Y) וקטור אקראי עם פונקציית צפיפות משותפת $(x,y)\in D$, $f_{X,Y}(x,y)$ ויהי וקטור הטרנספורמציה $(U,V)=(h_1(X),h_2(X))$. רוצים את פונקציית הצפיפות המשותפת של (U,V):

$$f_{U,V}(u,v)=?$$

נעבוד לפי השלבים הבאים:

1) הפיכת הקשר – נגדיר מערכת של שני מ"מ ונהפוך את הקשר ביניהם.

2) חישוב היעקביאן – נחשב את יעקביאן המערכת

$$|J|=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

3) נוסחת הטרנספורמציה – נשתמש בנוסחת הטרנספורמציה:

$$f_{U,V}(u,v)=|J|\,f_{X,Y}(x(u,v),y(u,v)) \quad , \quad (u,v)\in\Delta$$

4) התחום החדש – נעבור מהתחום D במישור xy לתחום Δ במישור uv.

תוחלת

הגדרה (בדיד): יהי X מ"מ בדיד בעל הסתברות $P_X(k)$. התוחלת של X היא:

$$\boxed{EX=\sum_k kP_X(k)}$$

*כאשר סוכמים על מספר סופי או ניתן להימנות של x-ים ובתנאי שהסכום מוגדר היטב.

הגדרה (רציף): יהי X מ"מ רציף בעל צפיפות $f_X(x)$. התוחלת של X היא:

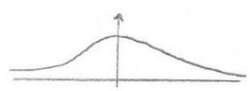
$$\boxed{EX=\int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)\,dx}$$

בתנאי שהאינטגרל מוגדר היטב. נשים-לב כי התוחלת מתפרקת לשני אינטגרלים, כלומר לשני מספרים:

$$EX=\int_{-\infty}^{0} xf_X(x)\,dx+\int_{0}^{\infty} xf_X(x)\,dx=I_-+I_+$$

התוחלת יכולה להיות סופית או אינסופית אך כאשר $I_+=\infty$ וגם $I_-=-\infty$ אז היא אינה מוגדרת!

למה – סימטריית פונקציית צפיפות ההסתברות



אם פונקציית הצפיפות $f_X(x)$ סימטרית סביב a: $f_X(a+x)=f_X(a-x)$

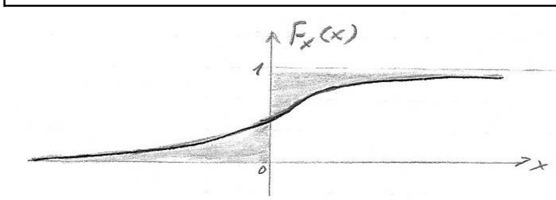
ואם התוחלת קיימת, אזי $EX=a$.

טענה – נוסחת הזנב

השטח מתחת לגרף ההתפלגות עבור $x\le 0$ ומעל הגרף עבור $x>0$ (כבאיור) שווה לתוחלת של X.

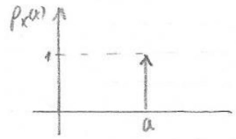
במילים אחרות, אם התוחלת קיימת וסופית אזי:

$$\left.\begin{aligned} I_+&=\int_0^{\infty} xf_X(x)\,dx=\int_0^{\infty}\left(1-F_X(x)\right)dx\\ I_-&=\int_{-\infty}^{0} xf_X(x)\,dx=-\int_{-\infty}^{0} F_X(x)\,dx \end{aligned}\right\}\Rightarrow \boxed{EX=\int_0^{\infty}\left(1-F_X(x)\right)dx-\int_{-\infty}^{0} F_X(x)\,dx}$$



יש גם גרסה למ"מ בדיד חיובי ("I_+ בדיד"):
$$\boxed{EX=\sum_{k=1}^{\infty}kP\left(X=k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}P\left(X\geq k\right)}$$

תכונות התוחלת



1) אם $X=a$, a קבוע אזי $EX=Ea=a$.

2) **(i)** $E\left(X+a\right)=EX+a$ **(ii)** $E\left(cX\right)=cEX$, c קבוע.

3) $E\left(g\left(x\right)+h\left(x\right)\right)=E\left(g\left(x\right)\right)+E\left(h\left(x\right)\right)$

משפטי תוחלת (ראה משפט ההחלקה)

1) משפט ההחלקה: $$\boxed{E\left[E\left[X\mid Y\right]\right]=EX}$$

2) תוחלת מותנית: $$\boxed{E\left[h\left(Y\right)X\mid Y\right]=h\left(Y\right)E\left[X\mid Y\right]}$$

3) הסתברות שלמה לתוחלת: $$\boxed{EX=\sum_{i}E\left[X\mid A_i\right]P\left(A_i\right)}$$

4) הסתברות שלמה לתוחלת מותנית: $$\boxed{E\left[X\mid Y\right]=\sum_{i}E\left[X\mid Y,A_i\right]P\left(A_i\mid Y\right)}$$

משתנה מקרי מעורב

הגדרה: X נקרא מ"מ מעורב אם פונקציית ההתפלגות שלו ניתנת לכתיבה בצורה הבאה:

$$\boxed{F_X\left(x\right)=\alpha F_X^d\left(x\right)+\beta F_X^c\left(x\right)}$$

כך ש- $\alpha+\beta=1$.

אם $Y\sim F^{(d)}$ הוא המ"מ הבדיד כאשר $F^{(d)}$ היא פונקציית ההתפלגות הבדידה שלו,

וכי $Z\sim F^{(c)}$ הוא המ"מ הרציף כאשר $F^{(c)}$ היא פונקציית ההתפלגות הרציפה שלו,

אזי נוכל להגדיר את התוחלת של מ"מ מעורב: $EX=\alpha EY+\beta EZ$

משפט – תוחלת של פונקציה של משתנה מקרי

יהי X מ"מ בעל צפיפות $f_X(x)$ ו- $Y=h(x)$ (h פונקציה רציפה פרט למספר סופי של נקודות).

אם EY קיימת אזי:

$$\boxed{EY=Eh(x)=\int_{-\infty}^{\infty}h(x)\,f_X(x)dx}$$

ובמקרה הבדיד:

$$\boxed{EY=Eh(x)=\sum_{x}h(x)P_X(x)}$$

מומנטים

הגדרה: יהי X מ"מ. המומנט מסדר k של X הוא: $\boxed{m_k=EX^k}$

כאשר $k=0,1,2,...$ ובתנאי שתוחלת זו קיימת.

הערות

1) אם k זוגי, m_k תמיד מוגדר היטב.

2) $m_0=1$.

שונות

<u>הגדרה</u>: יהי מ"מ X בעל תוחלת $EX=\mu$. השונות של X היא:

$$\sigma_X^2 = \operatorname{var}(X) = E(X-\mu)^2$$

כאשר **סטיית התקן** מוגדרת להיות: $\sigma_X = \sqrt{\operatorname{var}(X)}$

<u>תכונה מהותית של השונות</u>: $E(X-\mu)^2 \le E(X-a)^2$

מכאן נרשום נוסח שקול לשונות: $\boxed{\operatorname{var}(X) = EX^2 - (EX)^2}$

תכונות השונות

1) אם $X=a$, a קבוע אזי: $\operatorname{var}(X)=0$.

2) אם $\operatorname{var}(X)=0$, אז קיים קבוע a כך ש- $X=a$.

3) $\operatorname{var}(X+a)=\operatorname{var}(X)$

4) $\operatorname{var}(cX)=c^2\operatorname{var}(X)$, c קבוע.

משפטי שונות

1) שונות מוחלקת (ראה סעיף 24.1): $\boxed{\operatorname{var}(Y) = E\operatorname{var}(Y\mid X) + \operatorname{var}(E(Y\mid X))}$

2) שונות מותנית (ראה סעיף 24.1): $\boxed{\operatorname{var}(Y\mid X) = E\left[Y^2\mid X\right] - \left(E[Y\mid X]\right)^2}$

3) שונות של סכום מ"מ (ראה סעיף 25): $\boxed{\operatorname{var}(X+Y) = \operatorname{var}(X) + \operatorname{var}(Y) + 2\operatorname{cov}(X,Y)}$

4) אם X,Y **בלתי תלויים** (למעשה מספיק לדרוש **בלתי מתואמים** – ראה סעיף 26) אזי:

$$\boxed{\operatorname{var}(X+Y) = \operatorname{var}(X) + \operatorname{var}(Y)}$$

<u>הערות</u>

1) נשים-לב כי בסטיית התקן יתקיים: $\sigma_{cX} = |c|\sigma_X$.

2) כדי לבדוק שהשונות מוגדרת היטב מספיק לבדוק שהמומנט השני $m_2 = EX^2$ קיים וסופי כיוון שזה גורר שהמומנט הראשון קיים וסופי ומכאן גם השונות מוגדרת היטב. ובאופן כללי: אם המומנט מסדר n קיים וסופי אזי גם המומנט מסדר m קיים וסופי כך ש- $m<n$.

פונקציה יוצרת מומנטים

<u>הגדרה</u>: יהי X מ"מ. אזי לכל $s\in\mathbb{R}$ פונקציית יוצרת המומנטים של X מוגדרת להיות:

$$\boxed{M_X(t)=Ee^{tx}}$$

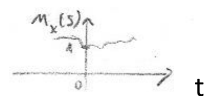
<u>תכונות פונקציה יוצרת מומנטים</u>

1) $M_X(t)$ מוגדרת לכל t.

2) $M_X(t)$ יכולה להיות סופית או אינסופית.

3) נסמן את הקטע: $I_X=\{t|M_X(t)<\infty\}$, אזי לכל x, אפס תמיד שייך לקטע: $0\in I_X$,

ובנוסף $M_X(0)=1$.



<u>טענה</u>: I_X תמיד קטע (פתוח, סגור, סופי, אינסופי, שילובים שלהם ואף $I_X=[0,0]=\{0\}$).

<u>הערה</u>: נשים-לב כי פונקציה יוצרת מומנטים היא למעשה <u>התמרת לפלס</u> של פונקציית הצפיפות $f_X(x)$ עבור מ"מ X:

$$M_X(t)=Ee^{tx}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}f_X(x)dx=\mathbb{L}\left[f_X(x)\right](t)$$

<u>משפט – מומנט מסדר k-י</u>

נניח ש- I_X מכיל קטע פתוח סביב $t=0$ ($(-\delta,\delta)\subset I_X$) וש- $M_X(t)$ גזירה k פעמים ב- $t=0$ אזי קיים המומנט מסדר k של X ומתקיים:

$$\boxed{m_k=M_X^{(k)}(t)\Big|_{t=0}}$$

למשל נשים-לב כי:

התוחלת: $m_1=M_X'(0)=EX$

השונות (אם $Ex=0$): $m_2=M_X''(0)=EX^2$

<u>שימושים</u>

אם ניתן לכתוב את $M_X(t)$ כטור מהצורה: $\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$, כאשר הפיתוח נכון עבור סביבה כלשהי

באפס: $t\in(-\delta,\delta)$, אזי המומנט ה- n -י הוא: $m_n=n!a_n$.

פונקציות יוצרות מומנטים ידועות

מ"מ	פי"מ	המומנט ה-k-י: $m_k = EX^k$
$X \sim Pois(\lambda)$	$M_X(t) = e^{-\lambda(1-e^t)}$	
$X \sim Bin(n,p)$	$M_X(t) = (q+pe^t)^n$	
$X \sim Geom(p)$	$M_X(t) = \begin{cases} \frac{pe^t}{1-qe^t} & ,t<\ln\left(\frac{1}{q}\right) \\ \infty & ,else \end{cases}$	
$X \sim Pasc(r,p)$	$M_X(t) = \begin{cases} \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^r & ,t<\ln\left(\frac{1}{q}\right) \\ \infty & ,else \end{cases}$	
$X \sim Exp(\lambda)$	$M_X(t) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\lambda-t} & ,t<\lambda \\ \infty & ,else \end{cases}$	$EX^k = \frac{k!}{\lambda^k}$
$X \sim Gamma(r,\lambda)$	$M_X(t) = \left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^{-r}$	$EX^k = \frac{(r+k-1)!}{(r-1)!} \cdot \frac{1}{\lambda^k}$
$X \sim N(\mu,\sigma^2)$ $Z \sim N(0,1)$	$M_X(t) = e^{t\mu+\frac{1}{2}t^2\sigma^2}$ $M_Z(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}$	$EZ^{2k} = (2k-1)!!$ $EZ^{2k-1} = 0$ $k = 1,2,\ldots$
$X \sim U(a,b)$	$M_X(t) = \frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$	

טרנספורמציה של פי"מ – תכונות

1) ישנה התאמה חח"ע בין פי"מ של מ"מ לבין התפלגות שלו.

2) יהי X מ"מ ו- $Y=aX+b$, אזי: $M_Y(t)=Ee^{t(ax+b)}=e^{bt}M_X(at)$.

3) יהיו $X_1,X_2,\dots,X_n$ מ"מ ב"ת ו- $Y=X_1+X_2+\dots+X_n$, אזי:

$$M_Y(t)=M_{X_1}(t)\cdot M_{X_2}(t)\cdot\dots\cdot M_{X_n}(t)$$

אם המשתנים הם גם שווי התפלגות (כלומר i.i.d) אזי: $M_Y(t)=\left(M_{X_1}(t)\right)^n$

ואם הם גם בעלי תוחלת 0 ושונות 1, אזי $M_{\frac{Y}{n}}(t)\xrightarrow{n\to\infty}e^{\frac{t^2}{2}}$, שזו בדיוק פי"מ של מ"מ נורמלי סטנדרטי $N(0,1)$.

פונקציה אופיינית

הגדרה: יהי X מ"מ, נגדיר פונקציה אופיינית: $\boxed{\varphi_X(t) = Ee^{itx}}$

הערה: נשים-לב כי פונקציה יוצרת מומנטים היא למעשה התמרת פורייה של פונקציית הצפיפות

$f_X(x)$ עבור מ"מ X: $\varphi_X(t) = Ee^{itx} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x)dx = \mathbb{F}\left[f_X(x)\right](t)$

תכונות פונקציה אופיינית

1) $\varphi_X(t)$ מוגדר וסופי לכל t.

2) $\varphi_X(0) = 1$, $\left|\varphi_X(t)\right| \le 1$ (כי $\left|\varphi_X(t)\right| = \left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x)dx\right| \le \int\limits_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left|e^{itx}\right|}_{\le 1}\left|f_X(x)\right|dx \le \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|f_X(x)\right|dx = 1$).

3) בהנחה ש- $\varphi_X^{(k)}(t)$ קיימת אזי מתקיים: $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k m_k$.

4) אם X ו- Y ב"ת אזי: $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$

5) $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb}\varphi_X(at)$

אי-שיוויונות

אי-שיוויון צ'בישב

יהי X מ"מ בעל תוחלת $EX=\mu$ וסטיית תקן $\sigma_X=\sigma$ אזי:

$$(1)\quad \boxed{P\left(\left|X-\mu\right|>b\right)\le\frac{\sigma^2}{b^2}}$$

<u>במילים</u>: ההסתברות ש- X חורג מהתוחלת שלו ביותר מ- b יחידות, חסומה מלמעלה על-ידי השונות מחולקת ב- b^2. בהצבת: "a סטיות תקן" $=b=a\sigma$ מקבלים:

$$(2)\quad \boxed{P\left(\left|X-\mu\right|>a\sigma\right)\le\frac{1}{a^2}}$$

כאשר (1) ו- (2) שקולים. **<u>הערה</u>:** ככל ש- b גדול יותר כך אי-השוויון מדויק יותר.

אי-שוויון מרקוב

לכל $a>0$:

$$\boxed{P\left(\left|X\right|\ge a\right)\le\frac{E\left|X\right|}{a}}$$

אם $\varphi(x)$ פונקציה מונוטונית עולה לכל $x\ge0$, $a\ge0$ ו- $\varphi(a)>0$ אזי:

$$\boxed{P\left(\left|X\right|\ge a\right)\le\frac{E\varphi\left(\left|X\right|\right)}{\varphi(a)}}$$

אי-שוויון ינסן

יהי X מ"מ ו- $h(x)$ פונקציה קמורה (מחייכת $\cup$: $h''(x)>0$), בהנחה שהתוחלות קיימות וסופיות מתקיים:

$$\boxed{Eh(X)\ge h(EX)}$$

<u>דוגמא</u>: $h(x)=x^2$ פונקציה קמורה לכל x, אזי לפי א"ש ינסן: $EX^2\ge(EX)^2$, ואכן:

$$EX^2-(EX)^2=\operatorname{var}(X)=\sigma^2\ge0$$

<u>תוספת</u>: אם קיים קטע I כך ש- $P(x\in I)=1$, ו- $h(x)$ קמורה רק ב- I אזי המשפט עדיין תקף.

<u>הערה</u>: עבור אותם תנאים אבל עם פונקציה קעורה (בוכייה $\cap$: $h''(x)<0$): $Eh(X)\le h(EX)$

וקטור אקראי בדיד

הגדרה: נתונים n משתנים מקריים $X_1, X_2, ..., X_n$. אזי:

1) הוקטור $\vec{X} = \left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$ נקרא וקטור אקראי (ו"א).

2) נאמר שוקטור אקראי הוא בדיד אם הוא יכול לקבל רק מספר סופי או ניתן להימנות של ערכים (וקטוריים).

3) אם $\vec{X} = \left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$ וקטור אקראי בדיד, פונקציית ההסתברות שלו נתונה על-ידי:

$$\boxed{\begin{aligned}&P_{X_1,X_2,...,X_n}\left(X_1, X_2, ..., X_n\right) = P\left(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_n = x_n\right) = \\&= P\left(\left\{X_1 = x_1\right\} \cap \left\{X_2 = x_2\right\} \cap ... \cap \left\{X_n = x_n\right\}\right)\end{aligned}}$$

תכונות של פונקציית הסתברות של וקטור אקראי בדיד

א) $P_{X_1,X_2,...,X_n}\left(X_1, X_2, ..., X_n\right) \geq 0$

ב) $\sum_{x_1} ... \sum_{x_n} P_{X_1,X_2,...,X_n}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = 1$

ג) אם ו"א $\left(X, Y\right)$ בדיד אזי גם X בדיד וגם Y בדיד (וכנ"ל גם למקרה הכללי).

פונקציית הסתברות משותפת ופונקציית הסתברות שולית

עבור ו"א $\left(X, Y\right)$ בדיד מתקיים:

$$\boxed{P_X\left(x\right) = \sum_y P_{XY}\left(x, y\right)}$$

כאשר $P_{XY}\left(x, y\right)$ נקראת **פונקציית ההסתברות המשותפת** של $\left(X, Y\right)$,

ו- $P_X\left(x\right)$ נקראת **פונקציית ההסתברות השולית** של X.

<u>הכללה</u>

עבור ו"א $\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$ בדיד מתקיים:

$$\boxed{P_{X_k}\left(x_k\right) = \sum_{X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}, X_{k+1}, \ldots, X_n} P_{X_1, X_2, \ldots, X_n}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)}$$

כאשר $P_{X_1, X_2, \ldots, X_n}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ נקראת **פונקציית ההסתברות המשותפת** של $\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$,

ו- $P_{X_k}\left(x_k\right)$ נקראת **פונקציית ההסתברות השולית** של X_k.

<u>הערה</u>: אם נתונה פונקציית ההסתברות המשותפת, ניתן לחשב ממנה את פונקציית ההסתברות השולית (לפי הנוסחה לעיל), בעוד שאם נתונות אפילו כל פונקציות ההסתברות השוליות, <u>לא</u> ניתן לדעת מהן את פונקציית ההסתברות המשותפת!

וקטור אקראי רציף

הגדרה: וקטור אקראי $\vec{X}=\left(X_1,X_2,\dots,X_n\right)$ נקרא רציף (בהחלט) אם קיימת פונקציה $f_{X_1,X_2,\dots,X_n}\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)$ כך שלכל קבוצה "טובה" A ב- $\mathbb{R}^n$ מתקיים:

$$\boxed{P\left(\left(X_1,X_2,\dots,X_n\right)\in A\right)=\int\int_A\dots\int f_{X_1,X_2,\dots,X_n}\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)dx_1dx_2\dots dx_n}$$

כאשר $f_{X_1,X_2,\dots,X_n}\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)$ היא **פונקציית הצפיפות המשותפת** של $\left(X_1,X_2,\dots,X_n\right)$.

תכונות פונקציית הצפיפות המשותפת

1) $f_{X_1,X_2,\dots,X_n}\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)\ge 0$

2) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,X_2,\dots,X_n}\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)dx_1dx_2\dots dx_n=1$

3) אם ו"א $\left(X,Y\right)$ רציף אזי גם X רציף וגם Y רציף (וכנ"ל גם למקרה הכללי).

4) $f_{X_1,X_2,\dots,X_n}$ נקבעת ביחידות עד כדי קבוצות של $\left(X_1,X_2,\dots,X_n\right)$ שנפחן במימד n שווה לאפס.

פונקציית צפיפות משותפת ופונקציית צפיפות שולית

עבור ו"א $\left(X,Y\right)$ רציף מתקיים: $\boxed{f_X\left(x\right)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}\left(x,y\right)dy}$

כאשר $f_{XY}\left(x,y\right)$ נקראת **פונקציית הצפיפות המשותפת** של $\left(X,Y\right)$

ו- $f_X\left(x\right)$ נקראת **פונקציית הצפיפות השולית** של X.

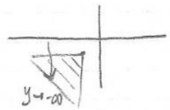
הכללה: עבור ו"א $\left(X_1,X_2,\dots,X_n\right)$ רציף מתקיים:

$$\boxed{f_{X_1}\left(x_1\right)=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}}_{n-1} f_{X_1,X_2,\dots,X_n}\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)dx_2dx_3\dots dx_n}$$

כאשר $f_{X_1,X_2,\dots,X_n}\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)$ נקראת **פונקציית הצפיפות המשותפת** של $\left(X_1,X_2,\dots,X_n\right)$,

ו- $f_{X_1}\left(x_1\right)$ נקראת **פונקציית הצפיפות השולית** של X_1 (ובדומה ל- X_k - שם לא סוכמים על k).

השטח הולך וקטן

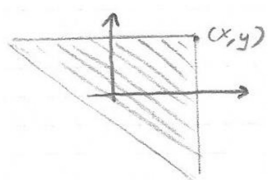


פונקציית התפלגות של וקטור אקראי

<u>הגדרה</u>: לוקטור אקראי $\vec{X}=\left(X_1,X_2,\dots,X_n\right)$ נגדיר פונקציית התפלגות:

$$\boxed{F_{X_1,X_2,\dots,X_n}\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)=P\left(X_1\le x_1,X_2\le x_2,\dots,X_n\le x_n\right)}$$

מקרה פרטי $n=2$:



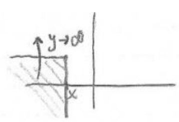
$$F_{X,Y}\left(x,y\right)=P\left(X\le x,Y\le y\right)$$

<u>תכונות פונקציית ההתפלגות של וקטור אקראי</u>

1) $F_{X_1,X_2,\dots,X_n}\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)$ לא יורדת בכל רכיב בנפרד (למשל ב- $n=2$ זאת-אומרת שאם $X_2\ge X_1$ אזי $F_{X,Y}\left(x_2,y\right)\ge F_{X,Y}\left(x_1,y\right)$).

2) ב- $n=2$: $\lim\limits_{x\to-\infty}F_{X,Y}\left(x,y\right)=\lim\limits_{y\to-\infty}F_{X,Y}\left(x,y\right)=0$

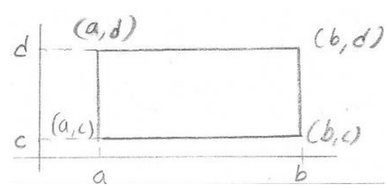
y הולך וגדל ולמעשה מקבלים את חצי המישור משמאל ל-x



3) $\lim\limits_{y\to\infty}F_{X,Y}\left(x,y\right)=P\left(X\le x\right)=F_X\left(x\right)$

$$\lim_{x\to\infty}F_{X,Y}\left(x,y\right)=P\left(Y\le y\right)=F_Y\left(y\right)$$

4) $P\left(\left(x,y\right)\in\boxed{Rectangle}\right)=F\left(b,d\right)-F\left(a,d\right)-F\left(b,c\right)+F\left(a,c\right)$



הקשר בין פונקציית ההתפלגות לפונקציית הצפיפות של וקטור אקראי (X,Y)

$$(1)\quad \boxed{F_{X,Y}(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\,dudv}$$

$$(2)\quad \boxed{f_{X,Y}(x,y)=\frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x\partial y}}$$

הכללה:

$$(1)\quad \boxed{\begin{aligned}&F_{X_1,X_2,\dots,X_n}(x_1,x_2,\dots,x_n)=P(X_1\le x_1,X_2\le x_2,\dots,X_n\le x_n)=\\&=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\dots\int_{-\infty}^{x_n} f_{X_1,X_2,\dots,X_n}(u_1,u_2,\dots,u_n)\,du_1du_2\dots du_n\end{aligned}}$$

$$(2)\quad \boxed{f_{X_1,X_2,\dots,X_n}(x_1,x_2,\dots,x_n)=\frac{\partial F_{X_1,X_2,\dots,X_n}(x_1,x_2,\dots,x_n)}{\partial x_1\partial x_2\dots\partial x_n}}$$

וקטור אקראי בלתי תלוי

נניח ש- $\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$ וקטור אקראי רציף או בדיד. נאמר ש- $\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$ **בלתי-תלוי** אם:

$$\boxed{F_{X_1, X_2, \ldots, X_n}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = F_{X_1}\left(x_1\right) F_{X_2}\left(x_2\right) \ldots F_{X_n}\left(x_n\right)}$$

<u>באופן כללי כאשר יש צפיפות:</u>

$\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$ ו"א ב"ת $\Leftrightarrow$ $f_{X_1, X_2, \ldots, X_n}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}\left(x_i\right)$ במקרה הרציף.

$\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$ ו"א ב"ת $\Leftrightarrow$ $P_{X_1, X_2, \ldots, X_n}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \prod_{i=1}^{n} P_{X_i}\left(x_i\right)$ במקרה הבדיד.

<u>הערות</u>

1) וקטור אקראי אשר התחום בו צפיפותו חיובית הוא לא תחום מלבני מקביל לצירים – משתניו <u>לא</u> ב"ת!

2) אם X ו- Y ב"ת אזי גם $h\left(X\right)$ ו- $g\left(Y\right)$ ב"ת לכל זוג פונקציות דטרמיניסטיות h ו- g.

3) X ו- $Y = g\left(X\right)$ ב"ת $\Leftrightarrow$ $Var\left(Y\right) = 0$.

קונבולוציה

הגדרה: נתונות שתי פונקציות אינטגרביליות g ו- h , הפעולה:

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} g(u)h(x-u)du=(g*h)(u)$$

נקראת הקונבולוציה של g ו- h. **הערה:** נשים-לב כי $g*h=h*g$

סכום משתנים מקרים

במקרה הרציף, כאשר נתונות $f_U(u)$ ו- $f_V(v)$, U ו- V ב"ת, ונגדיר $X=U+V$ אזי:

$$f_U * f_V = \underset{X}{f_{U+V}}(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_U(s) f_V(x-s)ds$$

ובמקרה הבדיד, כאשר נתונות $P_U(k)$ ו- $P_V(k)$ חיוביות רק ב- k שלם, U ו- V ב"ת (בדידים) אזי:

$$P_{U+V}(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} P_U(k)P_V(n-k)$$

קונבולוציות מוכרות

אם X ו- Y מ"מ בלתי-תלויים, ומתקיים $Z=X+Y$, אזי:

$$\begin{aligned}
&(1)\quad \overbrace{Bin(n,p)}^{X\sim} * \overbrace{Bin(m,p)}^{Y\sim} = \overbrace{Bin(n+m,p)}^{Z\sim}\\
&(2)\quad pois(\lambda_1)*pois(\lambda_2)=pois(\lambda_1+\lambda_2)\\
&(3)\quad Geom(p)*Geom(p)=pasc(2,p)\\
&(4)\quad pasc(r,p)*pasc(s,p)=pasc(r+s,p)\\
&(5)\quad Exp(\lambda)*Exp(\lambda)=Gamma(2,\lambda)\\
&(6)\quad Gamma(r,\lambda)*Gamma(s,\lambda)=Gamma(r+s,\lambda)\\
&(7)\quad N(\mu_X,\sigma_X^2)*N(\mu_Y,\sigma_Y^2)=N(\mu_X+\mu_Y,\sigma_X^2+\sigma_Y^2)
\end{aligned}$$

התפלגויות מיוחדות

התפלגות חי בריבוע

יהיו n מ"מ $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ בלתי-תלויים ומפולגים נורמלי-סטנדרטי, כלומר

$$i \in \{1,2,...,n\} \ , \ Z_i \sim N(0,1)$$

נגדיר את סכום הריבועים של המ"מ לעיל כ-

$$R_n^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + ... + Z_n^2 \quad , \quad R_n^2 \in (0,\infty)$$

אזי נאמר כי R_n^2 מפולג "חי בריבוע" (chi-square): $R_n^2 \sim \chi_n^2$ ומתקיים הקשר הבא:

$$R_n^2 \sim \chi_n^2 = Gamma\left(\overset{r}{\frac{n}{2}}, \overset{\lambda}{\frac{1}{2}}\right)$$

מכאן ניתן להגיע לתוחלת ולשונות של R_n^2:

$$E\left[R_n^2\right] = \frac{r}{\lambda} = \frac{\frac{n}{2}}{\frac{1}{2}} = n$$

$$\mathrm{var}\left(R_n^2\right) = \frac{r}{\lambda^2} = \frac{\frac{n}{2}}{\frac{1}{4}} = 2n$$

צפיפות ריילי

יהיו $X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(0,1)$ נורמליים סטנדרטיים בלתי-תלויים.

נגדיר מ"מ: $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ אשר מתאר את רדיוס המעגל הנמדד מראשית הצירים.

אזי צפיפות ההסתברות של R נקראת צפיפות ריילי ונתונה על-ידי:

$$f_R(r) = re^{-\frac{r^2}{2}} \ , \ r > 0$$

התפלגות מינימום ומקסימום

יהיו $X_1, X_2, ..., X_n$ מ"מ בלתי-תלויים.

אם נגדיר: $X_{\max} = \max\{X_1, X_2, ..., X_n\}$, $X_{\min} = \min\{X_1, X_2, ..., X_n\}$, אזי:

בבואנו לחשב את פונקציית ההתפלגות של שני מ"מ אלו, נזכור שני כללי אצבע:

1. אם המקסימום קטן ממספר כלשהו ($X_{\max} \le x$), אזי <u>כולם</u> קטנים ממנו.
2. אם המינימום גדול ממספר כלשהו ($X_{\min} \ge x$), אזי <u>כולם</u> גדולים ממנו.

מכאן, ניתן לחשב את פונקציות ההתפלגות (וע"י גזירה את הצפיפות) של שני מ"מ אלו:

פונקציית ההתפלגות של $X_{\max}$:

$$
\begin{aligned}
&F_{\max}(x) = P(X_{\max} \le x) = \\
&= P(X_1 \le x, X_2 \le x, ..., X_n \le x) \overset{independed}{=} \\
&= P(X_1 \le x) \cdot P(X_2 \le x) \cdot ... \cdot P(X_n \le x) = \\
&= F_{X_1}(x) \cdot F_{X_2}(x) \cdot ... \cdot F_{X_n}(x)
\end{aligned}
$$

פונקציית ההתפלגות של $X_{\min}$:

$$
\begin{aligned}
&F_{\min}(x) = P(X_{\min} \le x) = 1 - P(X_{\min} > x) = \\
&= 1 - P(X_1 > x, X_2 > x, ..., X_n > x) \overset{independed}{=} \\
&= 1 - P(X_1 > x) \cdot P(X_2 > x) \cdot ... \cdot P(X_n > x) = \\
&= 1 - (1 - F_{X_1}(x)) \cdot (1 - F_{X_2}(x)) \cdot ... \cdot (1 - F_{X_n}(x))
\end{aligned}
$$

<u>מינימום בין מ"מ גיאומטריים</u>

אם $X_1 \sim Exp\left(p_1\right)$ ו- $X_2 \sim Exp\left(p_2\right)$ מ"מ <u>בלתי-תלויים</u>, ומתקיים $Y=\min\left(X_1,X_2\right)$, אזי:

$$Y \sim Geom\left(1-q_1q_2\right)$$

(כאשר $p+q=1$)

<u>מינימום בין מ"מ מעריכיים</u>

אם $X_1 \sim Exp\left(\lambda_1\right)$ ו- $X_2 \sim Exp\left(\lambda_2\right)$ מ"מ <u>בלתי-תלויים</u>, ומתקיים $Y=\min\left(X_1,X_2\right)$, אזי:

$$Y \sim Exp\left(\lambda_1+\lambda_2\right)$$

<u>הכללה</u>: יהיו $X_1,X_2,\dots,X_n$ מ"מ <u>ב"ת</u> מעריכיים כך ש- $X_i \sim Exp\left(\lambda_i\right)$.

אם $Y=\min\left(X_1,X_2,\dots,X_n\right)$, אזי: $Y \sim Exp\left(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n\right)$.

תוחלת של פונקציה של וקטור אקראי

משפט

יהי $(X_1,X_2,...,X_n)$ ו"א בעל צפיפות $f_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1,x_2,...,x_n)$ ו- $Y=h(x_1,x_2,...,x_n)$ אזי:

$$\boxed{EY=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}h(x_1,x_2,...,x_n)\,f_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1,x_2,...,x_n)\,dx_1dx_2...dx_n}$$

בתנאי שהתוחלת קיימת.

מסקנות מהנוסחה (n=2)

1) $E(X+Y)=EX+EY$

2) אם (X,Y) ב"ת אזי $EXY=EX\cdot EY$

טרנספורמציות של וקטור אקראי

משפט: יהי $(X_1,X_2,...,X_n)$ ו"א בעל צפיפות $f_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1,x_2,...,x_n)$ ותהי $T(x_1,x_2,...,x_n)=(y_1,y_2,...,y_n)$ טרנספורמציה חד-חד-ערכית וגזירה –

אזי:

$$\boxed{f_{Y_1,Y_2,...,Y_n}(y_1,y_2,...,y_n)=\underbrace{\left|\frac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{y}}\right|}_{J}f_{X_1,X_2,...,X_n}\left(T^{-1}(y_1,y_2,...,y_n)\right)}$$

הערות

1) המשמעות ש- T היא טרנספורמציה חד-חד-ערכית וגזירה היא שאם

$$y_1=h_1(x_1,x_2,...,x_n)\ ,\ y_2=h_2(x_1,x_2,...,x_n)\ ,\ ...\ ,\ y_n=h_n(x_1,x_2,...,x_n)$$

אזי כל פונקציות ה- h_i גזירות.

2) עבור $n=2$ מקבלים:

$$\boxed{f_{U,V}(u,v)=|J_s(u,v)|\,f_{X,Y}\left(T^{-1}(u,v)\right)}$$

כאשר היעקביאן הוא:

$$|J_s(u,v)|=\begin{vmatrix}x_u' & x_v'\\ y_u' & y_v'\end{vmatrix}$$

התפלגות מותנית

הגדרה

A מאורע כך ש- $P(A)>0$, X מ"מ. אזי **פונקציית ההתפלגות המותנית** של X בהינתן A היא:

$$F_{X|A}(x|A)=P(X\le x|A)=\frac{P(\{X\le a\}\cap A)}{P(A)}$$

פונקציית הצפיפות המותנית של X בהינתן המאורע A היא:

$$f_{X|A}(x|A)=\frac{d}{dx}F_{X|A}(x|A)$$

התוחלת המותנית של X בהינתן המאורע A היא:

$$E(X|A)=\int_{-\infty}^{\infty}xf_{X|A}(x|A)dx$$

פונקציית ההסתברות המותנית למ"מ X בהינתן מאורע A:

$$P_{X|A}(X=x|A)=\frac{P(\{X=x\}\cap A)}{P(A)}$$

<u>הגדרה</u>: (X,Y) וקטור אקראי בעל צפיפות משותפת $f_{X,Y}(x,y)$, אזי:

פונקציית ההתפלגות המותנית של Y בהינתן X היא:

$$F_{Y|X}(y|x)=\frac{\frac{\partial}{\partial x}F_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

פונקציית הצפיפות המותנית של Y בהינתן X היא:

$$\boxed{f_{Y|X}\left(y\mid x\right)=\frac{f_{X,Y}\left(x,y\right)}{f_X\left(x\right)}}$$

פונקציית הצפיפות השולית של Y מתוך הו"א $\left(X,Y\right)$ היא:

$$\boxed{f_Y\left(y\right)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}\left(x,y\right)dx}$$

<u>משפט – "נוסחת הצפיפות השלמה"</u>:

$$\boxed{f_Y\left(y\right)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}\left(y\mid x\right)f_X\left(x\right)dx} \qquad (1)$$

<u>משפט – "נוסחת בייס לצפיפות"</u>:

$$\boxed{f_{Y|X}\left(y\mid x\right)=\frac{f_{X|Y}\left(x\mid y\right)f_Y\left(y\right)}{f_X\left(x\right)}} \qquad (2)$$

תוחלת מותנית

הגדרה: התוחלת המותנית של Y בהינתן X היא: $E(Y|X)=\underbrace{E(Y|X=x)}_{h(x)}|_{x=X}$

כלומר $E(Y|X)$ הוא בעצמו מ"מ שתלוי ב- X. אם נשתמש בצפיפות המותנית, נוכל להגיע להגדרה הבאה:

הגדרה: התוחלת המותנית של Y בהינתן X היא: $\boxed{E(Y|X=x)=\int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x)dy}$

נפתח את הנוסחה, נעזר במשפטים לעיל (1) ("צפיפות שלמה") ו- (2) ("בייס לצפיפות"):

$$E(Y|X)=\int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x)dy \overset{(2)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} y\frac{f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)}{f_X(x)}dy=$$
$$=\frac{\int_{-\infty}^{\infty} y f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)dy}{f_X(x)} \overset{(1)}{=} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} y f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)dy}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(y|x)f_Y(x)dy}$$

קיבלנו:

$$\boxed{E(Y|X)=\frac{\int_{-\infty}^{\infty} y f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)dy}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(y|x)f_Y(x)dy}}$$

משפטי החלקה

משפט ההחלקה:

$$\boxed{E\left[E\left[X \mid Y\right]\right] = EX}$$

תוחלת מותנית:

$$\boxed{E\left[h(Y)X \mid Y\right] = h(Y)E\left[X \mid Y\right]}$$

הסתברות שלמה לתוחלת:

$$\boxed{EX = \sum_i E\left[X \mid A_i\right]P(A_i)}$$

הסתברות שלמה לתוחלת מותנית:

$$\boxed{E\left[X \mid Y\right] = \sum_i E\left[X \mid Y, A_i\right]P(A_i \mid Y)}$$

שונות מוחלקת:

$$\boxed{\operatorname{var}(Y) = E\left[\operatorname{var}(Y \mid X)\right] + \operatorname{var}\left(E\left[Y \mid X\right]\right)}$$

שונות מותנית:

$$\boxed{\operatorname{var}(Y \mid X) = E\left[Y^2 \mid X\right] - \left(E\left[Y \mid X\right]\right)^2}$$

קוואריאנס

הגדרה

אם המומנטים מסדר 2 של המ"מ X ו- Y קיימים וסופיים ($EX^2, EY^2 < \infty$) אזי נגדיר את הקוואריאנס:

$$\sigma_{XY} = \operatorname{cov}(X,Y) = E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right]$$

מכאן נרשום נוסח שקול לקוואריאנס: $\boxed{\operatorname{cov}(X,Y) = EXY - EXEY}$

תכונות הקוואריאנס

1) $\sigma_{XX} = \sigma_X^2 \Rightarrow \operatorname{cov}(X,X) = \operatorname{var}(X) > 0$

2) $\operatorname{cov}(X_1+X_2,Y) = \operatorname{cov}(X_1,Y) + \operatorname{cov}(X_2,Y)$

3) $\operatorname{cov}(aX,Y) = a\operatorname{cov}(X,Y)$, a קבוע.

4) $\operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(Y,X)$

<u>סיכום תכונות (2), (3) ו- (4)</u>, a,b,c,d קבועים:

$$\operatorname{cov}(aX_1+bX_2, cY_1+dY_2) = ac\operatorname{cov}(X_1,Y_1) + ad\operatorname{cov}(X_1,Y_2) + bc\operatorname{cov}(X_2,Y_1) + bd\operatorname{cov}(X_2,Y_2)$$

5) $\operatorname{cov}(c,Y) = 0$, c קבוע.

6) $\operatorname{cov}(X+c,Y) = \operatorname{cov}(X,Y)$, c קבוע.

משתנים מקריים בלתי מתואמים

נשים-לב שאם הקוווריאנס מתאפס אזי תוחלת המכפלה מתפרקת למכפלת התוחלות:

$$\boxed{\operatorname{cov}(X,Y)=0 \Leftrightarrow EXY=EXEY}$$

הגדרה – משתנים מקריים בלתי מתואמים

$$\boxed{\operatorname{cov}(X,Y)=0 \quad \Leftrightarrow \quad (X,Y) \text{ בלתי מתואמים}}$$

משפט – הקשר בין מ"מ בלתי-תלויים למ"מ בלתי מתואמים

$$\boxed{(X,Y) \text{ בלתי-תלויים} \Leftarrow (X,Y) \text{ בלתי מתואמים}}$$

__הערות__

1) ההיפך לא נכון! כלומר יתכן מצב שבו $\operatorname{cov}(X,Y)=0$ אבל X,Y לא ב"ת.

2) אם הקוווריאנס <u>לא</u> מתאפס אזי X,Y <u>לא</u> ב"ת (זו דרך טובה להפריך אי-תלות!), כלומר:

$$\boxed{\operatorname{cov}(X,Y)\neq 0 \Rightarrow (X,Y) \text{ לא ב"ת}}$$

משפט – שונות מ"מ בלתי מתואמים

אם (X,Y) בלתי מתואמים אזי: $\boxed{\operatorname{var}(X+Y)=\operatorname{var}(X)+\operatorname{var}(Y)}$

כי באופן כללי: $\operatorname{var}(X+Y)=\operatorname{var}(X)+\operatorname{var}(Y)+2\operatorname{cov}(X,Y)$.

אי-שוויון קושי-שוורץ

__משפט:__ לכל X,Y: $\boxed{|\sigma_{XY}|\leq\sigma_X\sigma_Y}$

$$\boxed{|\operatorname{cov}(X,Y)|\leq\sqrt{\operatorname{var}(X)}\sqrt{\operatorname{var}(Y)}}$$

קורלציה

הגדרה

אם המומנטים השניים של המ"מ X,Y קיימים וסופיים ($EX^2, EY^2 < \infty$) והשוונויות שלהם חיוביות ממש ($\text{var}(X), \text{var}(Y) > 0$) אזי נגדיר את הקורלציה בין X ל- Y:

$$\boxed{\rho_{X,Y} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}}$$

$$\boxed{\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{var}(X)}\sqrt{\text{var}(Y)}}}$$

תכונות הקורלציה

1) $\rho_{X,Y} = \rho_{Y,X}$

2) $\rho_{aX,Y} = sign(a)\rho_{X,Y}$

3) $\rho_{X+a,Y} = \rho_{X,Y}$

4) $\left|\rho_{X,Y}\right| \le 1$ (מסקנה מאי-שוויון קושי-שוורץ)

סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים מפולגים זהה – i.i.d

נגדיר סדרה של משתנים מקריים בלתי תלויים ומפולגים זהה: $X_i = \begin{cases} 1 & ,p \\ 0 & ,q \end{cases}$

כך ש- $EX_i = \mu$, $\text{var}(X_i) = \sigma^2$.

ונגדיר את המ"מ S_n כ- "מספר ההצלחות ב- n הניסויים הראשונים": $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, אזי:

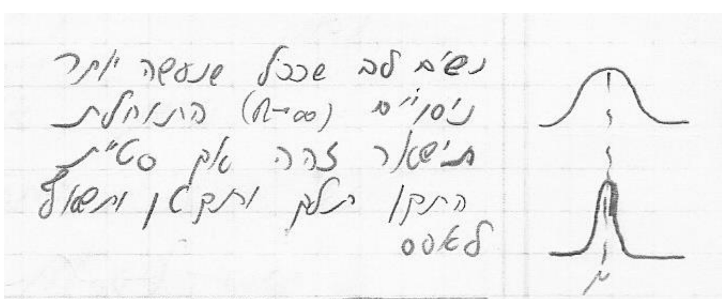
$$\begin{cases} ES_n = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \overset{*}{=} \sum_{i=1}^{n} EX_i = n\mu \\ \text{var}(S_n) = \text{var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{**}{=} \sum_{i=1}^{n} \text{var}(X_i) = n\sigma^2 \end{cases}$$

*מלינאריות התוחלת

**המ"מ ב"ת זה בזה.

נגדיר כעת מ"מ Y_n - "ממוצע ההצלחות ב- n ניסויים": $Y_n = \frac{S_n}{n}$, אזי:

$$\begin{cases} EY_n = E\frac{S_n}{n} = \frac{n\mu}{n} = \mu \\ \text{var}(Y_n) = \text{var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\text{var}(S_n) = \frac{1}{n^{\cancel{2}}}\cancel{n}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \end{cases}$$



חוק המספרים הגדולים

תהי $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ סדרה של משתנים מקריים $i.i.d$ כך ש- $EX_i=\mu$, $\operatorname{var}(X_i)=\sigma^2$, אזי לכל $\delta>0$:

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\mu\right|>\delta\right)=0$$

ואומרים: "$\frac{S_n}{n}\to\mu$ בהסתברות"

<u>מסקנה</u>

נניח ש- $P(A)=p$. אם נחזור על הניסוי הרבה פעמים ונספור את המספר היחסי של הפעמים

שהצלחנו, אז כאשר n גדול, המספר היחסי בו A מתממש קרוב ל- p .

משפט הגבול המרכזי

תהי $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ סדרה של משתנים מקריים $i.i.d$ כך ש- $EX_i=\mu$, $\operatorname{var}(X_i)=\sigma^2$, ונגדיר את

המ"מ S_n כ- "מספר ההצלחות ב- n הניסויים הראשונים": $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$.

א) אם נניח $\mu=0$ אזי: "$\frac{S_n}{\sqrt{n}}\to N(0,\sigma^2)$ בהתפלגות".

<u>המשמעות</u> היא שפונקציות ההתפלגות של $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ שואפות לזו של גאוסי $N(0,\sigma^2)$.

ב) אם נניח μ כלשהו אזי: "$\frac{\overset{ES_n}{S_n-n\mu}}{\sqrt{n}}\to N(0,\sigma^2)$ בהתפלגות",

<u>המשמעות</u> היא שאם X הוא מ"מ כלשהו בעל תוחלת μ ושונות σ^2 ויש סיבה לחשוב עליו כסכום של מספר גדול של מ"מ $i.i.d$, אזי אפשר לבצע את הקירוב:

$$\boxed{X\sim N(\mu,\sigma^2)=N(n\mu_i,n\sigma_i^2)}$$

התפלגות נורמלית רב-מימדית

וקטור אקראי (ו"א): $\vec{X}=\left(X_1,X_2,\ldots,X_n\right)$ נקרא <u>וקטור אקראי גאוסי</u> **(וא"ג)** אם קיימת מטריצה A

כך ש:
$$\boxed{f_{\vec{X}}\left(\vec{x}\right)=ce^{-\frac{1}{2}\left(\vec{X}-\overrightarrow{EX}\right)^T A\left(\vec{X}-\overrightarrow{EX}\right)}}$$

$\vec{X}$ נקרא וא"ג <u>סימטרי</u> אם וקטור התוחלות שלו אפס: $\overrightarrow{EX}=\vec{0}$ ואז פונקציית הצפיפות שלו היא:

$$\boxed{f_{\vec{X}}\left(\vec{x}\right)=ce^{-\frac{1}{2}\vec{X}^T A\vec{X}}}$$

<u>טענה – הקשר בין מטריצת A למטריצת הקווריאנס</u>

אם $\vec{X}=\left(X_1,X_2,\ldots,X_n\right)$ וא"ג (סימטרי או כללי) עם מטריצה A אזי: $\boxed{\sum_{\vec{X}}=A^{-1}}$,

כאשר $\sum_{\vec{X}}$ היא <u>מטריצת הקווריאנס</u> של $\vec{X}$ (ראה סעיף 26, "הרחבה – מטריצת קווריאנס").

מכאן, אם $\vec{X}$ וא"ג אזי פונקציית הצפיפות שלו תהיה מהצורה: $\boxed{f_{\vec{X}}\left(\vec{x}\right)=ce^{-\frac{1}{2}\left(\vec{X}-\overrightarrow{EX}\right)^T \Sigma_{\vec{X}}^{-1}\left(\vec{X}-\overrightarrow{EX}\right)}}$

ואם $\vec{X}$ וא"ג <u>סימטרי</u> אזי פונקציית הצפיפות שלו תהיה מהצורה: $\boxed{f_{\vec{X}}\left(\vec{x}\right)=ce^{-\frac{1}{2}\vec{X}^T \Sigma_{\vec{X}}^{-1}\vec{X}}}$

<u>הערה</u>: לא כל A יכולה לשמש לתבנית הריבועית (A צריכה להיות מטריצה חיובית).

<u>הגדרה – מטריצה חיובית</u>

מטריצה A מוגדרת חיובית אם לכל $\left(X_1,X_2,\ldots,X_n\right)$: $\quad \vec{X}^T A\vec{X}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\geq 0$

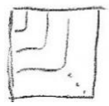
ושיוויון מתקיים רק עבור $\left(X_1,X_2,\ldots,X_n\right)=\left(0,0,\ldots,0\right)$.

שתי טענות על מטריצה חיובית

1) מטריצה A מוגדרת חיובית $\Leftrightarrow$ כל הערכים העצמיים (ע"ע) של A חיוביים

(ונזכור כי הערכים העצמיים של מטריצה סימטרית הם ממשיים).

2) מטריצה A מוגדרת חיובית $\Leftrightarrow$ כל המינורים הראשיים של A חיוביים.



טענה חשובה:

מוגדרת חיובית $A \Leftrightarrow$ היא פונקציית צפיפות $f_{\vec{X}}\left(\vec{x}\right)=ce^{-\frac{1}{2}\vec{X}^{T}A\vec{X}}$

תכונות של וקטור אקראי גאוסי

1) אם $\vec{X}=\left(X_1,X_2,...,X_n\right)$ וא"ג אזי כל אחד ממשתניו הוא מא"ג.

2) אם $\vec{X}=\left(X_1,X_2,...,X_n\right)$ וא"ג אזי כל תת-וקטור שלו הוא גם וא"ג.

3) אם $\vec{X}=\left(X_1,X_2,...,X_n\right)$ וא"ג אזי כל טרנספורמציה לינארית שלו

$Y=a_1X_1+a_2X_2+...+a_nX_n$ היא מא"ג.

4) אם $\vec{X}=\left(X_1,X_2,...,X_n\right)$ וא"ג ו- $\vec{Y}=M\vec{X}$ (כאשר $\overline{M}$ היא מטריצה לא סינגולרית:

$\det\left(M\right)\neq 0$), אזי גם $\vec{Y}$ וא"ג.

5) אם $\vec{X}$ וא"ג <u>סימטרי</u>, $\vec{Y}=M\vec{X}$, כאשר $\overline{M}$ היא מטריצה $n\times n$ לא סינגולרית ($\det\left(M\right)\neq 0$),

אזי גם $\vec{Y}$ הוא וא"ג <u>סימטרי</u> עם פונקציית צפיפות: $f_{\vec{Y}}\left(\vec{y}\right)=c\left|\det M^{-1}\right|e^{-\frac{1}{2}\left(M^{-1}\vec{Y}\right)^{T}A\left(M^{-1}\vec{Y}\right)}$

<u>במילים אחרות</u>: $\vec{Y}$ הוא גם וא"ג <u>סימטרי</u> עם מטריצה $\tilde{A}=\left(M^{-1}\right)^{T}A\left(M^{-1}\right)$.

נירמול וא"ג

לכל מטריצה מוגדרת חיובית A יש מטריצה B מוגדרת חיובית כך ש- $B^2 = A$ $\Leftarrow$ $B = A^{\frac{1}{2}}$ ומכאן נקבל את המשפט הבא:

משפט

אם $\overrightarrow{X}$ וא"ג סימטרי עם מטריצה A סימטרית ונגדיר: $\overrightarrow{Y} = \underbrace{A^{\frac{1}{2}}}_{M} \overrightarrow{X}$, אזי $\overrightarrow{Y}$ וא"ג סימטרי עם מטריצת היחידה: $\left(M^{-1}\right)^T A\left(M^{-1}\right) = A^{-\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}} = I$.

למשל עבור $n=1$: $f_X(x) = ce^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}}$, כלומר $A = \frac{1}{\sigma^2}$ $\Leftarrow$ $A^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sigma}$ ולפי המשפט:

$X \sim N\left(0,\sigma^2\right)$ מא"ג , $Y = \frac{1}{\sigma} X \sim N(0,1)$ מא"ג עם מטריצת היחידה.

מקסימום של וא"ג

המקסימום של פונקציית הצפיפות $f_{\vec{X}}(\vec{x})$ מתקבל בוקטור התוחלות $\overrightarrow{EX}$.

אי-תלות ואי-תאימות בין רכיבי וקטור אקראי גאוסי

באופן כללי ראינו כי מתקיים:

X_i, X_j בלתי-תלויים $\Leftarrow$ X_i, X_j בלתי מתואמים

אבל בתוך משפחת הצפיפויות הגאוסיות החץ הופך <u>לדו-כיווני</u>, כלומר:

אם $\overrightarrow{X} = \left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$ וא"ג אזי לכל $i \neq j$:

X_i, X_j בלתי-תלויים $\Leftrightarrow$ X_i, X_j בלתי מתואמים

במילים אחרות, אם X_i, X_j הם מ"מ השייכים לוא"ג ומצאנו כי $\operatorname{cov}\left(X_i, X_j\right) = 0$, אזי הם גם ב"ת!

שתי טענות חשובות והשגיאות הנפוצות הנלוות להן

1) היזהרו: אם X מא"ג, Y מא"ג $\not\Rightarrow$ (X,Y) וא"ג.

טענה חשובה: אם X מא"ג, Y מא"ג ו- X,Y **ב"ת** $\Leftarrow$ (X,Y) וא"ג.

2) היזהרו: אם $\vec{X}=(X_1,X_2,...,X_n)$ וא"ג $\not\Rightarrow$ רכיביו ב"ת זה בזה.

טענה חשובה: A אלכסונית $\Leftrightarrow$ רכיביו ב"ת זה בזה.

הסבר: A אלכסונית $\Leftrightarrow$ $\Sigma_{\vec{X}}$ אלכסונית $\Leftrightarrow \forall i\neq j:\ \operatorname{cov}(X_i,X_j)=0 \Leftrightarrow$ X_i,X_j ב"ת.

או לפי צפיפויות: A אלכסונית $\Leftrightarrow \forall i\neq j:\ f_{X_i,X_j}=f_{X_i}\cdot f_{X_j} \Leftrightarrow$ X_i,X_j ב"ת.

חזאים

הגדרה – חזאי כללי

(X,Y) וקטור אקראי, החזאי האופטימלי של Y באמצעות X הוא:

$$\boxed{Y=h(x)=E[Y\mid X=x]}$$

כך שלכל פונקציה אחרת g מתקיים:

$$E(Y-h(X))^2\leq E(Y-g(X))^2$$

הערה: אם (X,Y) הם ב"ת, אזי $E[X\mid Y]=EX$.

הגדרה – חזאי לינארי

(X,Y) וקטור אקראי, החזאי האופטימלי של הלינארי של Y באמצעות X הוא:

$$\boxed{Y_L=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\operatorname{var}(X)}(X-EX)+EY}$$

או בצורה אחרת:

$$\boxed{\frac{Y_L-EY}{\operatorname{var}(Y)}=\rho_{X,Y}\frac{X-EX}{\operatorname{var}(X)}}$$